

## Тайны «Закона Мура»

В конце 2002 года прошел Московский форум Intel<sup>3</sup> под эгидой распространения «закона Мура» на ближайшее будущее, по крайней мере, лет на десять или даже двадцать вперед<sup>4</sup> (при этом специалисты компании признают, что «закон Мура» имеет эмпирический характер и требует коррекции). Он предполагает, что число транзисторов на кристалле микросхем удваивается за каждые от одного до двух лет. Сам Гордон Мур поначалу полагал, что время удвоения составляет около одного года, но со временем эта оценка заметно изменилась — если вначале говорили об удвоении за полтора года, а сейчас уже за два года, но прогноз на следующее десятилетие выглядит скорее фантастическим.

### Уточнение «закона Мура»

Столь пристальное внимание к «закону Мура» со стороны Intel делает целесообразным его уточнение. Изменение показателя удвоения в экспоненциальном (или точнее степенном) законе вдвое означает чудовищное расхождение в прогнозах на срок даже до 10–20 лет. В связи с этим нужно выяснить его значения на протяжении тридцатилетней истории развития микропроцессоров и больших интегральных схем. В этом и заключается цель данной статьи.

С позиций математики «закон Мура» представляется простым выражением:

$$N(y) = N_0 \cdot 2^{\frac{y}{\mu}}, \text{ зависимость (1)}$$

$N_0$  — количество транзисторов на кристалле в некоторый год (условно считаем его нулевым),

$N(y)$  — число транзисторов на кристалле спустя лет,  
 $y$  — срок (в годах и долях года) за который число транзисторов возрастает вдвое.

Под  $N$  можно понимать и иные параметры, например число ячеек памяти в устройствах памяти, частоту работы микропроцессоров и микросхем и т.д. Заданием  $N_0$  и начального значения  $y$  можно перемещать точку отсчета начала действия «закона Мура» и оценивать его приемлемость для разных интервалов времени.

Если мы располагаем таблицами значений  $N$  и  $y$ , то можно попытаться найти искомые параметры  $N_0$  и  $\mu$  для зависимости  $N(y)$  хотя бы с наименьшей среднеквадратической погрешностью для всей совокупности исходных данных. Таким образом, при строгом математическом подходе, мы приходим к необходимости решить задачу нелинейной регрессии, поскольку зависимость  $N(y)$  от  $y$  и параметра  $\mu$  оказывается нелинейной. Задача уточнения «Закона Мура» является хорошей иллюстрацией к применению систем

компьютерной математики для прогноза сложной зависимости по ее эмпирически полученным исходным данным.

### **Какой прогноз дает уравнение по «закону Мура»?**

Если свести в одну таблицу данные о динамике роста числа транзисторов (в тысячах штук) на кристалле микропроцессоров Intel с момента появления в 1971 году первого микропроцессора 4004, то будет охвачен тридцатилетний период разработки процессоров. Но насколько данные этой таблицы<sup>5</sup> соответствуют представленной формуле? И возможен ли по ним прогноз? Попробуем ответить на эти вопросы.

К сожалению, данные неравномерно распределены во времени  $u$  (в годах) и в значительной степени случайны, что препятствует применению простых методик нелинейной регрессии и простых функций линейного (относительно искомых параметров) предсказания, таких, как функция `predict` в системе Mathcad<sup>6 7</sup>. Нелинейная регрессия такого вида не реализована даже в таких маститых системах компьютерной математики, как Maple. Но, к счастью, в системе Mathcad 2002i<sup>7</sup> никаких проблем в ее проведении нет, если не считать больших вычислительных погрешностей и возможности переполнения разрядной сетки даже такой системы компьютерной математики, фигурирующей с числами, имеющими значения до  $10^{308}$ .

На *рис. 2* представлен документ системы Mathcad 2002i с математической иллюстрацией «закона Мура». В левом верхнем углу документа задана формула «закона Мура» и в аналитическом виде вычислены ее частные производные по искомым параметрам  $N$  и  $u$ . Затем заданы векторы  $F1$  (функции и ее производных, нужных для реализации алгоритма нелинейной регрессии), числа лет прошедших с 1971 года  $Vu$  и числа тысяч транзисторов на кристалле процессора  $VN$ . С помощью функции `genfit`, использующей эти данные, вычислены параметры  $N0$  и  $u$ . Начальные условия, сильно влияющие на точность регрессии, задаются вектором  $VS$  — они содержат стартовые значения параметров  $N$  (в тысячах штук) и значения  $u$ .

## "Закон Мура" с позиций математики

### Оценка параметра удвоения $u$ методом нелинейной (экспоненциальной) регрессии

$$F(y, N, yy) := N \cdot 2^{\frac{y}{u}} \quad \text{Формула удвоения}$$

$$F1(y, k) := \begin{bmatrix} k_1 \cdot 2^{\frac{y}{k_2}} \\ \frac{y}{2^{k_2}} \\ -k_1 \cdot 2^{\frac{y}{k_2}} \cdot \frac{y}{(k_2)^2} \cdot \ln(2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{dN} F(y, N, yy) \rightarrow 2^{\frac{y}{u}}$$

$$\frac{d}{dy} F(y, N, yy) \rightarrow -N \cdot 2^{\frac{y}{u}} \cdot \frac{y}{u^2} \cdot \ln(2) \quad \text{ORIGIN} := 1$$

$$V_y := (0 \ 1 \ 3 \ 7 \ 11 \ 14 \ 18 \ 22 \ 24 \ 26 \ 28 \ 29 \ 30)$$

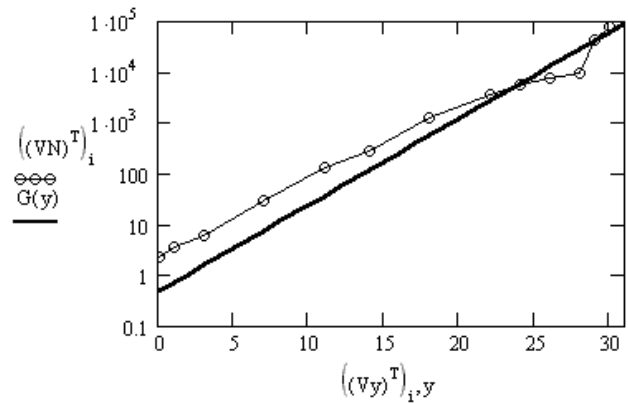
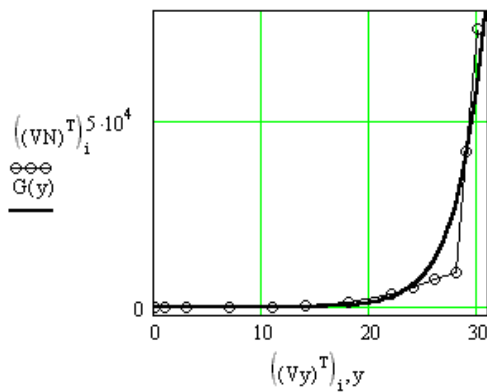
$$V_N := (2.3 \ 3.5 \ 6 \ 29 \ 134 \ 275 \ 1200 \ 3500 \ 5500 \ 7500 \ 9500 \ 42000 \ 75000)$$

$$k := \text{genfit}(V_y^T, V_N^T, VS, F1) \quad k = \begin{pmatrix} 0.464 \\ 1.769 \end{pmatrix} \quad \text{VS} := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Вектор  $k$  возвращает значения  $N=k_1$  и  $u=k_2$  для наилучшего среднеквадратического приближения  $F(y, N, yy)$  с коэффициентом корреляции  $\text{corr}$

$$G(y) := F1(y, k)_1 \quad \text{corr}(G(V_y), V_N) = 0.955$$

$$i := 1..13 \quad y := 0..32$$



**Рис. 2**

Левый график задает число транзисторов как функцию от параметра  $u$  (время удвоения) в линейном масштабе. При этом расчетный график имеет типично экспоненциальный вид. Он показывает особенно резкое нарастание числа транзисторов в микропроцессорах, начиная с 90-х годов прошлого века. До этого времени график мало представителен. Вообще же говоря, говорить о хорошем соответствии построенного графика исходным данным было бы не вполне уместно — начальные точки данных ложатся почти на ось  $y$ , а конечные располагаются отнюдь не на расчетной кривой. Это следствие огромного диапазона изменения данных.

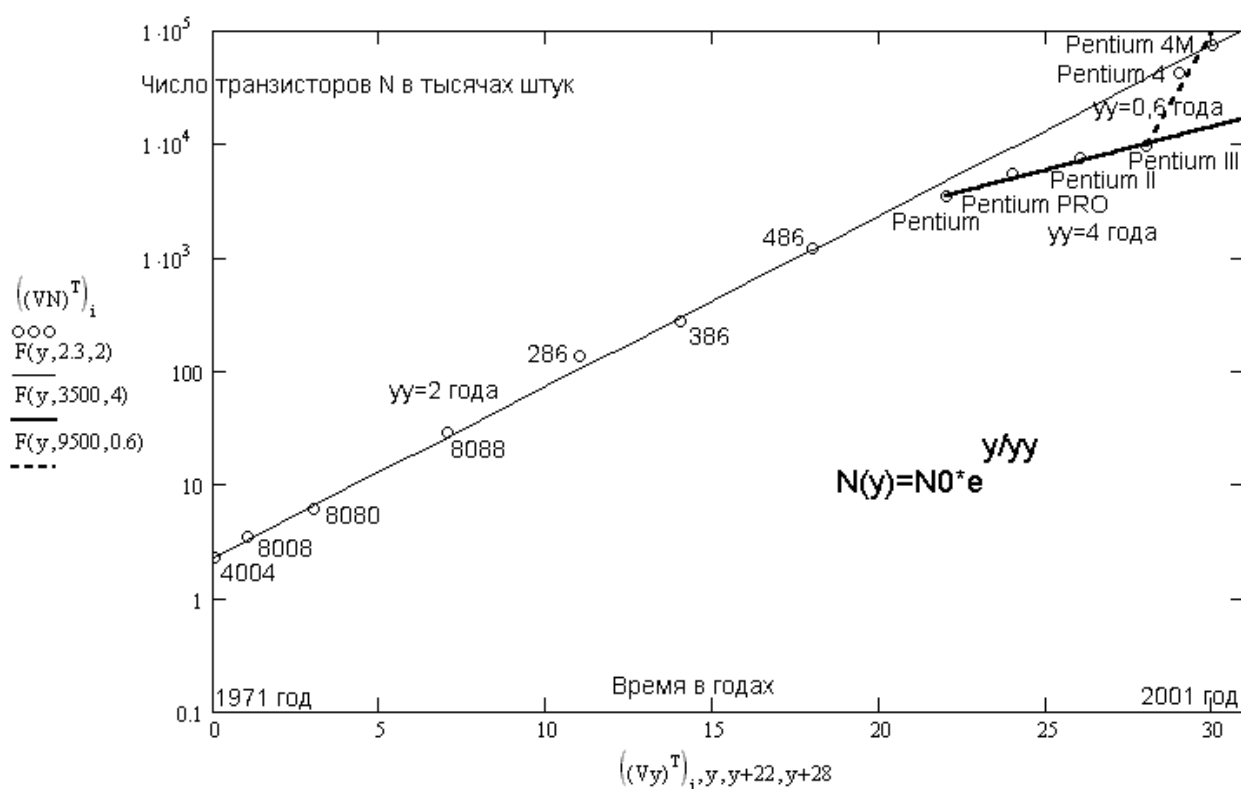
Интереснее выглядит расчетный график в логарифмическом масштабе (справа внизу). Он превращается в прямую, наклон которой определяется параметром  $u$ . В течении первых примерно двадцати лет расчетный график приближающей функции и график, построенный по точкам реальных данных, идут практически параллельно, что свидетельствует о справедливости оценок Мура на протяжении этого времени. При этом реальное число транзисторов в серийных микропроцессорах оказывалось несколько большим, чем при расчетной оценке. Найденное время  $u$  при этом составило 1.769 года, т.е. удвоение числа транзисторов происходило примерно за два года. Ранние оценки времени в полтора года и даже в один год нелинейной регрессией не подтверждаются (Intel отказалась от них).

Однако, в период между 22 и 28 условными годами развития (или между 1993 и 1999 гг.) стал наблюдаться заметный устойчивый спад в темпах роста числа транзисторов на кристалле. Он проявляется в постепенном отклонении точек реальных данных вниз. Первые чуть больше двадцати лет развития процессоров соответствовали эволюционному пути развития технологии микропроцессоров — от процессора 4004 до Pentium. С появлением процессоров Pentium архитектура и сложность процессоров резко возросли, в частности из-за существенного увеличения команд мультимедиа расширения MMX. Число транзисторов на кристалле превысило один из первых технологических и даже психологических барьеров в один миллион штук.

В результате возникло заметное отставание реальной технологии от «Закона Мура». В этот период особенно усилились сомнения в его принципиальной справедливости. Но, в последние примерно три года Intel добилась резкого скачка в совершенствовании технологии, перейдя на производство микропроцессоров новой архитектуры — Pentium 4, производимых по технологии с разрешением 0.13 мкм на больших кремниевых дисках диаметром 300 мм. Стали внедряться новые технологические достижения. И теряющая крутизну кривая роста числа транзисторов резко скакнула вверх именно в эти последние три года.

Итак, математический анализ «Закона Мура» подтверждает справедливость подмеченной Муром зависимости. Правда, надо отметить, что экспоненциальный рост числа транзисторов (и иных параметров микросхем) от времени, очень чувствителен к параметру  $u$ . Его приближенные значения от 1 до 2 лет ведут к чудовищным просчетам (см. далее). Да и сама процедура нелинейной регрессии для такой зависимости оказывается очень чувствительной к ошибкам машинных расчетов. В этом нетрудно убедиться, слегка меняя исходные данные или начальные приближения для  $u$  и  $N$ . Тем не менее, близкое к единице значение коэффициента корреляции  $corr=0.955$  говорит о том, что зависимость (1) при полученных значениях  $N_0$  и  $u$  не так уж и плохо соответствует исходным парам данных.

### Представление "Закона Мура" в трех временных интервалах



**Рис. 3**

Характерной особенностью нелинейной регрессии оказывается большая погрешность в начальной области расчетов и резкое отличие расчетного параметра  $N$  в первые годы от реальных значений числа транзисторов на кристаллах первых микропроцессора. Так выброс вниз даже небольшого числа исходных точек в правой области графика (где число транзисторов очень велико) ведет к тому, что большинство исходных точек в левой области графика (где число транзисторов мало) располагается сверху расчетной зависимости — что прекрасно видно из правого графика (рис. 2).

Устранить этот недостаток можно добрым «дедовским» методом — взяв за левую точку прямой графика в логарифмическом масштабе точку первого отсчета и подобрав крутизну прямой на глаз по наилучшему положению в облаке исходных точек (отсчетов). Считая за нулевой 1971 год и за  $N_0=2.3$  тысячи транзисторов первого микропроцессора 4004, попробуем методом проб подобрать с помощью Mathcad логарифмическую прямую, на которую хорошо укладываются данные за первые годы развития процессоров и которая исходит из точки  $(0, N_0)$ . Результат представлен на рис. 3 сплошной тонкой линией. Названия процессоров на графике проставлены с помощью графического редактора.

### Точная коррекция

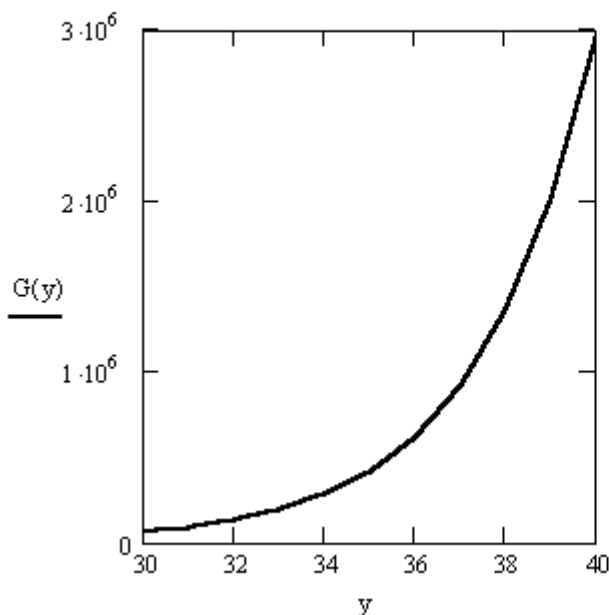
Результат оказывается просто поразительным. Оказывается целых 22 года число транзисторов и впрямь увеличивалось вдвое за каждые  $y=2$  года. При этом исходные точки укладываются почти точно на представляющую их приближенную зависимость.

Таким образом, проведенная специалистами Intel коррекция «Закона Мура» была вполне обоснованной и довольно точной. Однако до года или даже до полутора лет время удвоения  $u$  за этот период никогда не падало. Следовательно, строго математически, начальные прогнозы Мура были очень неточны, что нисколько не умаляет их эмоциональное значение. Однако с появлением процессоров класса Pentium действие даже скорректированного «Закона Мура» стало грубо нарушаться. Попробуем подобрать прямую для хорошего представления реалий роста числа транзисторов после этого периода, задав в качестве отсчета момент появления процессоров Pentium — точка (22, 1200). Оказывается (*жирная прямая на рис. 3 (см. выше)*), время удвоения возросло почти вдвое и составило  $u=4$  года. Это стало свидетельством предкризисной ситуации в разработке микропроцессоров и развитии их технологии. В какой то степени это оправдывает отказ Intel от новых названий процессоров очередного поколения — как известно Pentium II и Pentium III сохранили отношение к звучному имени Pentium процессоров пятого поколения, которые и стали переломной точкой в «Законе Мура».

Как известно, период спада в промышленности всегда сменяется периодом резкого подъема, увы, в дальнейшем вновь переходящего в спад. С переходом от производства процессора Pentium III к Pentium 4 в 1999 году кривая роста числа транзисторов во времени резко скакнула вверх, начиная с точки (28, 9500). Это, очевидно, связано с очередным усложнением процессоров, появлением новых команд поддержки Интернета и потокового расширения и в процессорах Pentium III и Pentium 4. Время удвоения уменьшилось до рекордно малой величины в 0.6 года, но его оценка пока математически весьма недостоверна из-за малого объема выборки данных после 1999 года — всего 3 точки.

### Прогноз на ближайшие 10 лет

$$u := 30..40$$



### Влияние параметра $u$ при прогнозе на 10 лет

$$F(10, 75000, 2) = 2.4 \times 10^6$$

$$F(10, 75000, 1.5) = 7.62 \times 10^6$$

$$F(10, 75000, 1) = 7.68 \times 10^7$$

Рис. 4

В целом, усредняя параметр  $u$  на весь тридцатилетний период развития микропроцессоров можно признать, что данные нелинейной регрессии достаточно корректны. Последуем за специалистами Intel и попытаемся дать прогноз роста числа транзисторов на кристалле микросхем на основании нашего приближения «Закона Мура» выражением (1). Это показано (на рис. 4) для первого десятилетия и для следующего десятилетия (на рис. 5).



Рис. 5

### «Прогноз на следующее десятилетие выглядит скорее фантастическим»

Прогноз на первые десять лет выглядит вполне реалистичным. Можно ожидать появления микропроцессоров, на кристалле которых будет до 3 млрд. транзисторов. Intel скромно обещает довести число транзисторов до миллиарда к концу текущего десятилетия, но не указывает точно год, когда это случится. Вполне возможно, что такое произойдет несколько ранее 2010 года — ведь полмиллиарда транзисторов на кристалле уже имеют новейшие опытные образцы 64-разрядного процессора Itanium, которые появятся уже в 2003 году. И тогда 3 млрд. транзисторов могут разместиться в процессорах 2010 года.

Но вот прогноз на следующее десятилетие выглядит скорее фантастическим, чем реальным — судя по нему, к 2020 году число транзисторов на кристалле достигнет примерно 140 млрд. Но кто знает, может так и будет? Ведь создатели первых

микропроцессоров 4004 вряд ли могли предполагать, что через 30 лет число транзисторов в микропроцессорах увеличится в 34000 раз.

Тем не менее, поводов для сомнения в таком прогнозе достаточно. Математически они вызваны критичностью «Закона Мура» к параметру — времени удвоения  $u$ . Под рисунками *рис. 4 и 5 (см. выше)* показаны примеры расчета по формуле «Закона Мура» на конец 10 и 20-летнего периода предсказания для разных  $u=1, 1.5$  и 2 года. Расхождения в оценках достигают соответственно примерно 32 и более чем 1000 раз. В этих условиях точность прогноза гарантировать нельзя и выводами «Закона Мура» надо пользоваться с большой осторожностью.

Физическим ограничением на рост числа транзисторов может оказаться очередной предел геометрического разрешения в производстве интегральных микросхем. Даже с учетом внедряемой новейшей технологии литографии со сверхжестким ультрафиолетовым излучением этот барьер перемещается от 0.1 мкм до 0.03–0.05 мкм. При этом толщина подзатворного диэлектрика микроскопических полевых транзисторов, уже ныне составляющая менее 5 атомных слоев, достигнет предельного значения в один атомный слой.

Наконец, главный козырь к приостановке действия «Закона Мура» — компьютерные системы из дискретных, скорее всего, превратятся в распределенные системы. В результате надобность в сверхмощных одиночных процессорах попросту отпадет. И «Закону Мура» придется подчиниться другому, тоже отнюдь не точному в математическом смысле, закону о переходе количества в качество.

### **Прогноз по чувствительным параметрам**

Из сказанного можно сделать следующие выводы.

- «Закон Мура» нельзя считать точным физическим или математическим законом, подобным законам Ньютона или Эйнштейна, скорее это грубое статистическое приближение к куда более сложной действительности.
- Если принять время удвоения в два года, то оказывается, что «Закон Мура» прекрасно предсказывал рост числа транзисторов на кристаллах больших интегральных схем на протяжении двадцати двух лет.
- Параметр удвоения «Закона Мура» нужно время от времени пересматривать, особенно в периоды смены поколений микросхем и внедрения новых достижений в технологии.
- Пока обоснованной выглядит представление динамики роста транзисторов в микропроцессорах тремя отрезками прямых на графике с логарифмическим масштабом с параметром удвоения  $u=2$  года в период с 1971 г. по 1993 г.,  $u=4$  года в период с 1993 г. по 1999 г. и  $u=0.6$  года в период с 1999 г. по 2002 г.



- Интегральная оценка времени удвоения числа транзисторов за 30 лет, выполненная методом наименьших квадратов, имеет значения порядка 1.769 года при коэффициенте корреляции 0.955.
- Графическая визуализация «Закона Мура» в логарифмическом масштабе отслеживает изменения в технологии изготовления интегральных микросхем, переход к повышенной разрядности микропроцессоров и появление новинок в технологическом процессе, особенно таких, которые ведут к очередному уменьшению геометрических размеров компонентов на кристаллах микросхем.
- Можно ожидать очередного скачка в снижении значения  $\lambda$  после освоения технологии 64-разрядных микропроцессоров и перехода на технологию с разрешением 0.09 мкм и последующего повышения из-за наступления очередного физического предела на разрешение фотолитографии.
- Хотя нет оснований доверять точности прогнозов по «Закону Мура» в строго математическом смысле, нельзя отрицать его привлекательности в приближенных и понятных качественных оценках.
- Высокая чувствительность параметра удвоения и огромные расхождения в прогнозах при фиксации его значения требуют более осторожных попыток применения «Закона Мура» серьезных для прогнозов.
- Описанная методика оценки параметров «Закона Мура» вполне применима для оценки числа транзисторов на различных типах больших интегральных схем и других вычислительных, связанных и телекоммуникационных устройств, для оценки роста их рабочих частот, снижения потребления электроэнергии и стоимости.
- Разработка прогнозов развития больших интегральных микросхем по таким параметрам, как число транзисторов на кристалле, рост рабочих частот и объемов памяти, снижение электропотребления и др., требует специальных исследований и создания новых методик надежного многофакторного прогнозирования и в этом смысле исследования «Закона Мура» стоит продолжить, используя средства новейших систем компьютерной математики.
- При оценке «Закона Мура» надо не забывать о другом важном эмпирическом законе — о переходе количества в качество, который позволяет предполагать, что слишком долго экспоненциальный процесс роста числа транзисторов на кристалле одиночного процессора продолжаться не может и дискретные вычислительные системы превратятся в распределенные.

[Владимир Дьяконов<sup>2</sup> / Exponenta Pro. Математика в приложениях<sup>1</sup>](#)

- 
1. Материал предоставлен изданием [Exponenta Pro. Математика в приложениях](#) (Научно-практический журнал, посвященный решению актуальных прикладных задач в различных областях человеческой деятельности с использованием математического

программного обеспечения (в частности, специализированных математических пакетов).)

2. Дьяконов Владимир Павлович — профессор, доктор технических наук, академик международной академии наук педагогического образования, профессор кафедры информатики и электрорадиотехники Смоленского государственного педагогического университета (г. Смоленск) Автор выражает искреннюю надежду на то, что будет найдена возможность продлить жизнь закона Му-ра хотя бы на ближайшие пару десятилетий — даже если математика этого не подтверждает.
3. Московский форум разработчиков Intel (Intel Developer Forum — IDF), прошел 2 октября 2002 г. в здании Президиума РАН. На форуме выступил исполнительный директор компании Крейг Барретт.
4. Крейг Барретт представил пленарный доклад на упомянутом форуме, лейтмотивом его выступления стало распространение «закона Мура» на все отрасли производства компьютеров и средств телекоммуникаций, а также на развитие их элементной базы. Intel стала рассматривать «Закон Мура» как некий эталон, по которому можно сверять темпы развития микроэлектронной отрасли. На форуме были так же представлены успехи современной микроэлектроники — микропроцессоры с десятками и сотнями миллионов транзисторов на кристалле и с рабочими частотами до 3 ГГц, нанотехнологии, позволившие получить полевые транзисторы с толщиной диэлектрика затвора в 5 атомных слоев, терагерцовые, трехмерные полевые и кремниевогерманиевые биполярные транзисторы, микроскопические электромеханические устройства на кремниевом кристалле, сверхскоростные локальные и глобальные беспроводные сети, радио- телекоммуникационное оборудование и др.
5. **Динамика роста числа транзисторов (в тысячах штук) на кристалле микропроцессоров Intel**

Тип микропроцессора	Тысяч транзисторов	Год разработки	Параметр $\mu$
4004	NO-2,3	1971	0
8008	03 мбай	1972	1
8080	6	1974	3
8088	29	1979	8
286	134	1982	11
386	257	1986	15
486	1200	1989	18
Pentium	3500	1993	22
Pentium PRO	5500	1995	24
Pentium II	7500	1997	26
Pentium III	9500	1999	28
Pentium 4	42000	2000	29
Pentium 4 M	75000	2001	30

6. Дьяконов В. П. Компьютерная математика. Теория и практика. — М.: Нолидж, 2001.
7. Дьяконов В. П. Mathcad 2001. Специальный справочник. — СПб.: Питер, 2002.