

# Теорема Котельникова

Материал из Википедии — свободной энциклопедии

**Теорéма Котéлькикова** (в англоязычной литературе — **теорема Найквиста-Шеннона**) гласит, что, если [аналоговый сигнал](#)  $x(t)$  имеет ограниченный [спектр](#), то он может быть восстановлен однозначно и без потерь по своим дискретным [отсчётам](#), взятым с частотой более удвоенной максимальной частоты спектра  $F_{max}$ :

$$f_{\text{дискр}} > 2 \cdot F_{max},$$

где  $F_{max}$  — верхняя частота в спектре, или (формулируя по-другому) по отсчётам, взятым с периодом чаще полупериода максимальной частоты спектра  $F_{max}$ :

$$T_{\text{дискр}} < \frac{1}{2 \cdot F_{max}}.$$

## Содержание

- [1 Пояснение](#)
- [2 История открытия](#)
- [3 Развитие теоремы](#)
- [4 См. также](#)
- [5 Примечания](#)
- [6 Публикации](#)

## Пояснение

Такая трактовка рассматривает идеальный случай, когда сигнал начался бесконечно давно и никогда не закончится, а также не имеет во временной характеристике [точек разрыва](#). Именно это подразумевает понятие «спектр, ограниченный частотой  $F_{max}$ ».

Разумеется, реальные сигналы (например, звук на цифровом носителе) не обладают такими свойствами, так как они конечны по времени и, обычно, имеют во временной характеристике разрывы. Соответственно, их спектр бесконечен. В таком случае полное восстановление сигнала невозможно и из теоремы Котельникова вытекает 2 следствия:

- Любой аналоговый сигнал может быть восстановлен с какой угодно точностью по своим дискретным отсчётам, взятым с частотой

$$f_{\text{дискр}} > 2 \cdot F_{max},$$

где  $F_{max}$  — максимальная частота, которой мы ограничили спектр реального сигнала.

- Если максимальная частота в сигнале превышает половину частоты прерывания, то способа восстановить сигнал из дискретного в аналоговый без искажений не существует.

Говоря шире, теорема Котельникова утверждает, что непрерывный сигнал можно представить в виде следующего ряда:

$$\sum x(k\Delta t) \frac{\sin(\pi F_D(t - k\Delta t))}{\pi F_D(t - k\Delta t)}.$$

Под интегральной суммой написана формула отсчётов функции  $x(t)$ . Мгновенные значения этой функции есть значения дискретизированного сигнала в каждый из моментов времени.

## История открытия

Теорема была сформулирована [Гарри Найквистом](#) в 1928 году в работе «Certain topics in telegraph transmission theory» и является одной из основополагающих теорем в теории и технике цифровой связи. Примерно в это же время (1928 г.) Карл Купфмюллер показал такие же результаты.<sup>[1]</sup> Похожие результаты были опубликованы [В. А. Котельниковым](#) в [1933 году](#) в его работе «О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи».

## Развитие теоремы

Впоследствии было предложено большое число различных способов аппроксимации сигналов с ограниченным спектром, обобщающих теорему отсчетов<sup>[2][3][4]</sup>.

## См. также

- [Интерполяционная формула Уиттекера-Шеннона](#)
- [Частота Найквиста](#)
- [Элементарный цифровой канал](#)
- [Экстраполятор нулевого порядка](#)
- [Экстраполятор первого порядка](#)
- [Квантование](#)
- [Передискретизация](#)
- [Атомарные функции](#)

## Примечания

- ↑ К. Kūpfmüller. Über die Dynamik der selbsttätigen Verstärkungsregler. Elektrische Nachrichtentechnik, vol. 5, no. 11, pp. 459—467, 1928. (German); К. Kūpfmüller, On the dynamics of automatic gain controllers, Elektrische Nachrichtentechnik, vol. 5, no. 11, pp. 459—467. (English translation)
- ↑ Джерри А. Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор. — ТИИЭР, т. 65, № 11, 1977, с. 53—89.
- ↑ Хургин Я. И., Яковлев В. П. Прогресс в Советском Союзе в области теории финитных функций и ее применений в физике и технике. — ТИИЭР, 1977, т. 65, № 7, с. 16—45.
- ↑ Басараб М. А., Зелкин Е. Г., Кравченко В. Ф., Яковлев В. П. Цифровая обработка сигналов на основе теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона. — М.: Радиотехника, 2004.

## Публикации

- [H. Nyquist](#). Certain topics in telegraph transmission theory. Trans. AIEE, vol. 47, pp. 617—644, Apr. 1928.
- [Котельников В. А.](#) О пропускной способности эфира и проволоки в электросвязи — Всесоюзный энергетический комитет. // Материалы к I Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности, 1933. [Репринт статьи в журнале УФН, 176:7 \(2006\), 762—770.](#)
- [С. Е. Shannon](#). Communication in the presence of noise. Proc. Institute of Radio Engineers, vol. 37, no.1, pp. 10—21, Jan. 1949.

Источник

«[http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0\\_%D0%9A%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9A%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0)»

Категории: [Теоремы](#) | [Обработка сигналов](#) | [Цифровая обработка сигналов](#)